

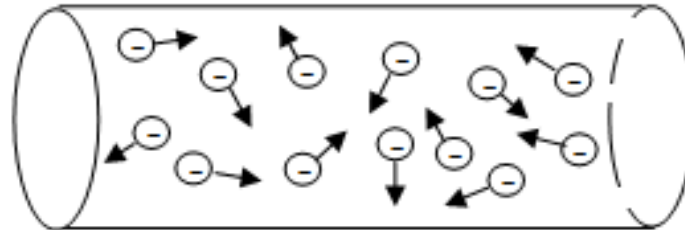
ELEKTRIČNA STUJA

Usmjereno kretanje slobodnih naelektrisanja u provodnoj sredini pod dejstvom električnog polja naziva se električna struja.

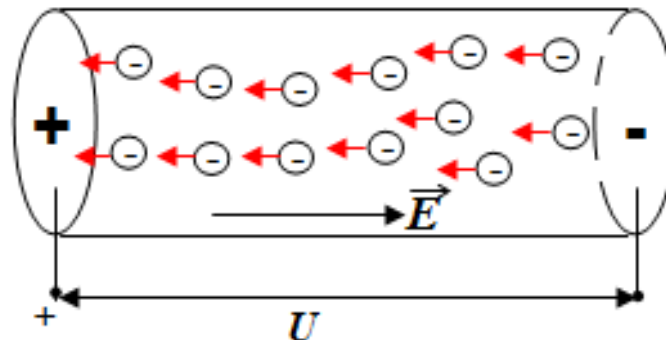
Električna struja može teći samo kroz provodne sredine.

Jedino u takvim sredinama postoje slobodne naelektrisane čestice koje se mogu kretati usmjereno.

U metalima su nosioci struje elektroni, u elektrolitima pozitivni i negativni joni, u jonizovanim gasovima elektroni i joni...



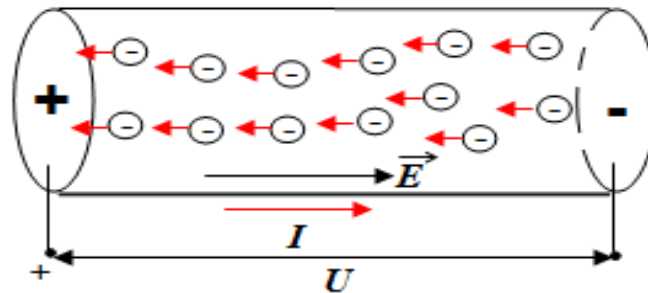
Slika 15: Haotično kretanje elektrona u provodnoj sredini



Slika 15A: Usmjereno kretanje elektrona pod dejstvom el. polja (električna struja)

SMJER ELEKTRIČNE STRUJE

Fizički, odnosno stvarni smjer kretanja elektrona je nasuprot smjeru vektora električnog polja (od – ka +).



Slika 16A: Smjer električne struje

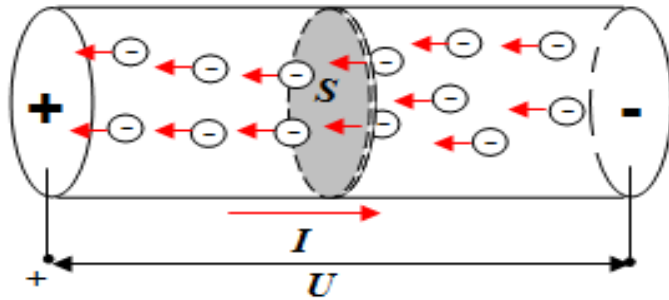
Usvojeni, tehnički smjer struje kroz provodnik je od + ka -.

Tehnički smjer struje je isti kao i smjer električnog polja.

U svim proračunima električnih kola koristi se tehnički smjer struje:

POZITIVAN SMJER STRUJE je: od + ka -

JAČINA STRUJE (I [A])



Slika 16B: Uz definicija jačina električne struje

se definiše kao odnos naelektrisanju Q [C] koje protekne kroz poprečni presjek provodnika za određeno vrijeme t [s]:

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow$$

Naelektrisanje Q koje za vrijeme t protekne kroz poprečni presjek provodnika sa strujom I :

$$Q = I \cdot t$$

Vrijeme t za koje kroz poprečni presjek provodnika sa strujom I protekne naelektrisanje Q :

$$t = \frac{Q}{I}$$

Jedinica za jačinu struje je: **AMPER**, [A]

$$[A] = \frac{[C]}{[s]}, [C] = [A] \cdot [s], [s] = \frac{[C]}{[A]}$$

U praksi se često za jačinu struje, osim **ampera**, koriste i manje i veće jedinice:

$$\text{miliamper} \quad \text{mA} = 10^{-3} \text{ A}$$

$$\text{mikroamper} \quad \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}, \dots$$

$$\text{kiloamper} \quad \text{kA} = 10^3 \text{ A}, \dots$$

ELEKTRIČNA OTPORNOST, kraće OTPORNOST ili OTPOR ($R[\Omega]$)

Otpornost je veličina koja karakteriše suprostavljanje posmatrane sredine proticanju električne struje.

Oznaka za otpornost je: R ili r

Jedinica za otpornost je: om , $[\Omega]$

Otpornost metalnog provodnika, dužine l [m] i poprečnog presjeka S [mm²] je:

$$R[\Omega] = \rho \frac{l}{S}$$

ρ je specifična otpornost materijala provodnika, a koja izražava zavisnost otpornosti od vrste materijala od koje je provodnik napravljen.

Jedinica za specifičnu otpornost je: $\left[\frac{\Omega mm^2}{m} \right]$ ili $[\Omega m]$

Metali su najbolji provodnici električne struje.

Materjali manje specifične otpornosti su bolji provodnici električne struje.

$$\rho_{Ag} = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega m$$

$$\rho_{Cu} = 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega m$$

$$\rho_{Al} = 2,8 \cdot 10^{-8} \Omega m$$

$$\rho_{Fe} = 10 \cdot 10^{-8} \Omega m$$

ELEKTRIČNA PROVODNOST, kraće PROVODNOST (G [S])

je veličina recipročna električnoj otpornosti:

$$G = \frac{1}{R}$$

Jedinica za provodnost je: *simens*, [S],

$$[S] = \left[\frac{1}{\Omega} \right]$$

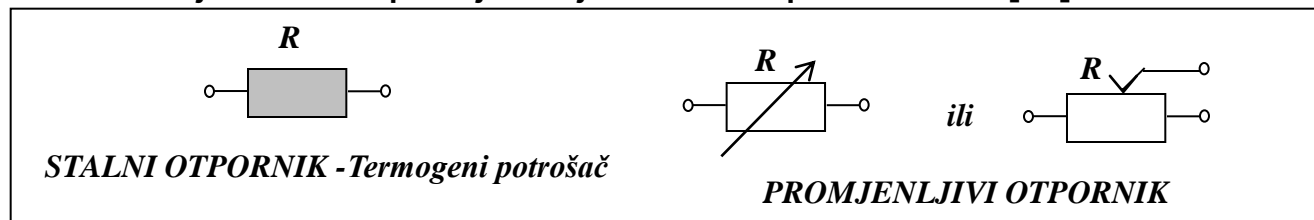
Materjali veće specifične provodnosti su bolji provodnici električne struje.

OTPORNICI

su elementi, konstruisani tako da u električno kolo u koje su vezani unose određnu otpornost R [Ω] (značajno veću od otpornosti provodnika veza - vodova i kontakata).

To su elementi – PRIJEMNICI u kojima se električna energija pretvara u toplotu (elektrotermički uređaji, sijalice sa užarenom niti i dr.) i dr.

U šemama električnih kola otpornici se najčešće predstavljaj sljedećim grafičkim simbolima, i na njima se upisuje vrijednost otpornost R [Ω]



DJELOVANJE ELEKTRIČNE STRUJE

Toplotno djelovanje struje

Provodnik kroz koji teče struja se zagrijava, što znači da je proticanje struje praćano određenim pretvaranjem električne energije u toplotnu. Ovo se naziva **Džulov efekat**. Toplotno djelovanje električne struje (Džulov efekat) se koristi u raznim uređajima u domaćinstvu (rešo, šporet, grijalice, TA peć, bojleri,...), u industriji za topljenje metala, kod osigurača itd.

Magnetsko djelovanje

Oko provodnika sa strujom javlja se magnetsko polje, što se može evidentirati postavljanjem magnetske igle u prostor oko provodnika sa strujom. Magnetno djelovanje električne koristi se npr. kod elektromagneta koji su našli veliku primjenu u nauci i tehnici.

Hemijsko djelovanje

Pri prolasku struje kroz elektrolit (tečni provodnik koji predstavlja rastvor nekih jedinjenja) javljaju se određene hemijske reakcije koje dovode do izdvajanja raznih materijala na elektrode koje su postavljene u elektrolit. Ova pojava se naziva **elektroliza**. U praksi se elektroliza koristi za dobijanje raznih metala, npr. bakra, aluminijuma i dr.

Električna struja ima i **svjetlosno dejstvo** (električna sijalica), a takođe i **mehaničko dejstvo** (mnoge mašine u industriji i domaćinstvu pokreću pomoću električne struje).

Električni izvori

Da bi postojala struja u provodnoj sredini u kojoj postoje slobodna naelektrisanja, potrebno je da budu ispunjena dva uslova:

- da postoji električno polje koje djeluje silom na slobodna naelektrisanja i primorava ih da se usmjereno kreću - električni izvor,
- da postoji zatvoreni put za kretanje slobodnih naelektrisanja - zatvoreno električno kolo.

Električno polje je vektor, pa osim inteziteta (sile na naelektrisanje) ima i smjer. Ako se smjer električnog polja ne mijenja, ne mijenja se ni smjer kretanja naelektrisanja pa kroz provodnik teče jednosmjerna struja. Ako se uz to ni jačina polja ne mijenja, onda je struja stalna ili konstantna jednosmjerna struja.

Ako električno polje mijenja svoj smjer u određenim vremenskim razmacima, mijenjati će se i smjer proticanja naelektrisanja, pa govorimo o naizmjeničnoj struji.

U praksi se električno polje uspostavlja i održava pomoću električnih uređaja koji se nazivaju ELEKTRČNI IZVORI ili, kratko IZVORI.

To su električni uređaji na čijim priključnicama (polovima) postoji razlika potencijala – električni napon, koji se naziva **ELEKTROMOTORNA SILA IZVORA**.

Električni izvori imaju **dva pola (priključne tačke):**

pozitivni (+) – na kojem je višak pozitivnog naelektrisanja (manjak elektrona) i

negativni (-) – na kojem je višak negativnog naelektrisanja (višak elektrona).

Između polova izvora postoji (stvorena dejstvom stranih sila) **određena potencijalna razlika, odnosno napon. To je elektromotorna sila izvora, skraćunica: *ems*.**

Oznaka za *ems* je: \mathcal{E} ili E - za izvore jednosmjerne struje,

e - za izvore vremenski promjenljive (naizmjenične) struje.

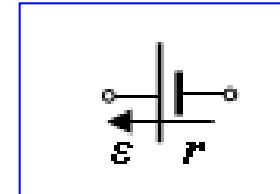
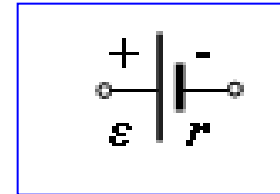
JEDINICA za elektromotornu silu je : *volt*, [V]

Priključnice (polovi) izvora jednosmjerne struje imaju stalno isti polaritet, **jedan pol je uvijek pozitivan, a drugi pol uvijek negativan.** Struja stalno kroz isti pol (pozitivni) izlazi iz izvora i kroz drugi pol (negativni) u njega ulazi – **struja stalno teče istim smjerom.** Takvi su izvori **baterije i akumulatori.**

Ako polovi izvora periodično mijenjaju predznak, to su izvori naizmjenične struje. Takvi su izvori generatori u elektranama, od kojih teče struja, preko transformatora i vodova, do svakog potrošača. Polovi ovih izvora promijene predznak 50 puta u sekundi. Elektroni, toliko puta u sekundi prođu kroz provodnu konturu u jednom i drugom smjeru.

ELEKTRIČNI IZVORI JEDNOSMJERNE STRUJE

U električnim šemama izvori jednosmjerne struje se najčešće prikazuju simbolima:



Svaki izvor ima dva pola:

pozitivni + (tačka višeg potencijala) i

negativni - (tačka nižeg potencijala).

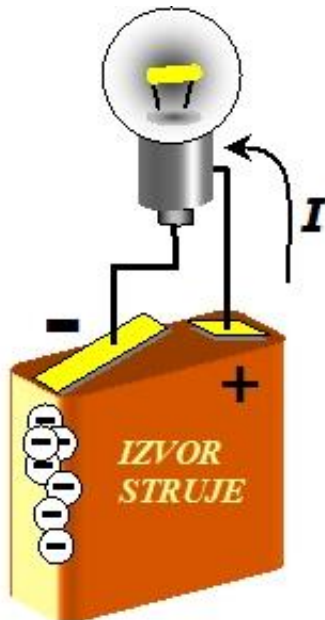
U prikazima izvora sa oznakom polariteta + i - :
SMJER *ems* je od - ka +.

U prikazu smjera ***ems*** strelicom,
vrh strelice označava tačku višeg potencijala.

Svaki izvor posjeduje i određenu otpornost.

To je **unutrašnja (sopstvena) otpornost izvora: $r [\Omega]$.**

Vrijednost te otpornosti je veoma mala, i u praksi se često zanemaruje: $r \approx 0$



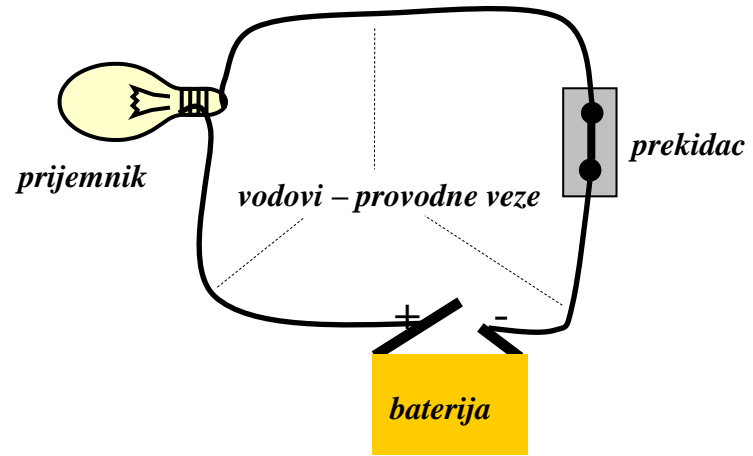
ELEKTRIČNO KOLO

je zatvoreni put po kome teče električna struja (može biti i više takvih puteva).

Električno kolo je skup međusobno povezanih električnih elemenata (uređaja) kao što su: **električni izvori**, **otpornici** kao prijemnici, odnosno potrošači električne energije, **kondenzatori**, **prekidači** i dr.

Kroz električno kolo teče električna struja dok je ono zatvoreno.
U otvorenom kolu nema električne struje.

Primjer prostog električnog kola:



Prosta električna kola imaju samo jedan zatvoreni put kojim teče struja. Zatvoreni put kojim teče električna struja naziva se KONTURA.

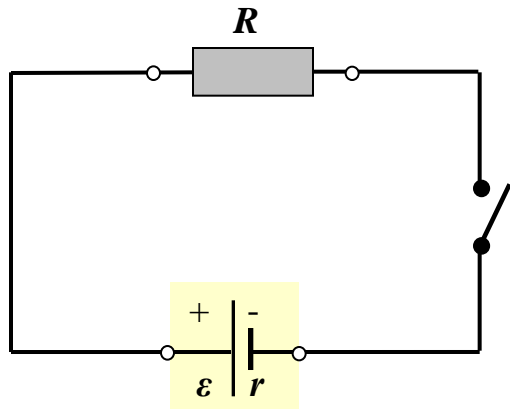
Prosta električna kola imaju samo jednu konturu.

U prostim električnim kolima, kroz sve elemente kola protiče ista struja.

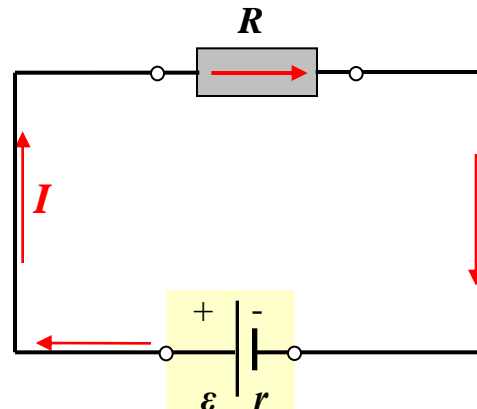
U praksi su električna kola najčešće složena.

Složena električna kola imaju više zatvornih puteva kojima teku struje, odnosno dvije ili više kontura.

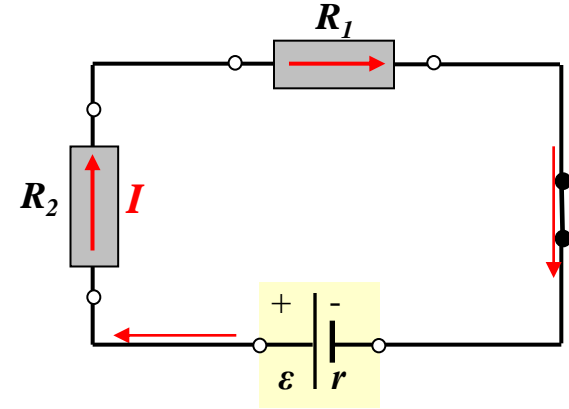
Električna kola se prikazuje preko ELEKTRIČNIH ŠEMA, kraće ŠEMA



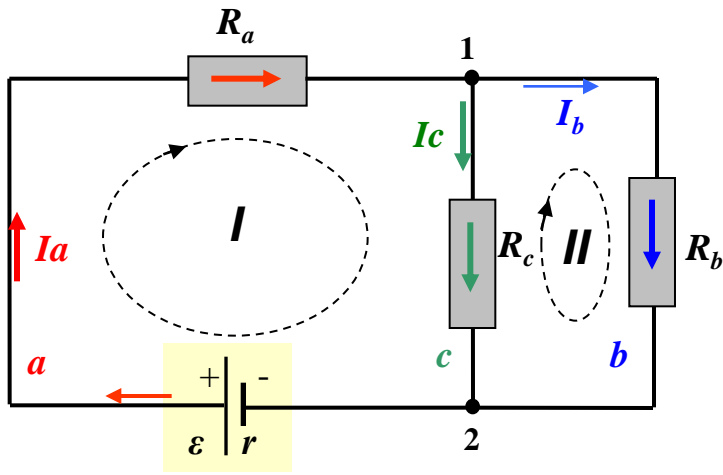
a) Prosto el. kolo,
prekidač otvoren – nema struje



b) Prosto el. kolo,
prekidač zatvoren – teče struja



c) Prosto el. kolo sa dva potrošača
Struja kroz sve elemente je ista



d) Složeno el. kolo

1 i 2 su čvorovi, broj čvorova (m) je $m=2$

a , b , c su grane, broj grana je (n) je $n=3$

Grana a: $2\varepsilon R_a 1$

Grana b: $1R_b 2$

Grana c: $1R_c 2$

Kroz sve elemente jedne grane protiče ista struja.

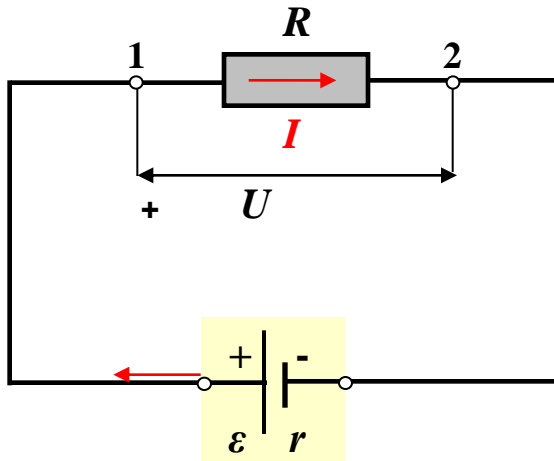
I i II su nezavisne konture.

Broj nezavisnih kontura ($k=n-m+1$) je $k=2$

Kontura I: $2\varepsilon R_a 1R_c 2$

Kontura II: $1R_b 2R_c 1$

OMOV ZAKON



Između napona U na krajevima otpornika, otpornosti R i struje I kroz otpornik, važi zavisnost:

$$I = \frac{U}{R}, \text{ odnosno } U = RI \text{ i } R = \frac{U}{I}$$

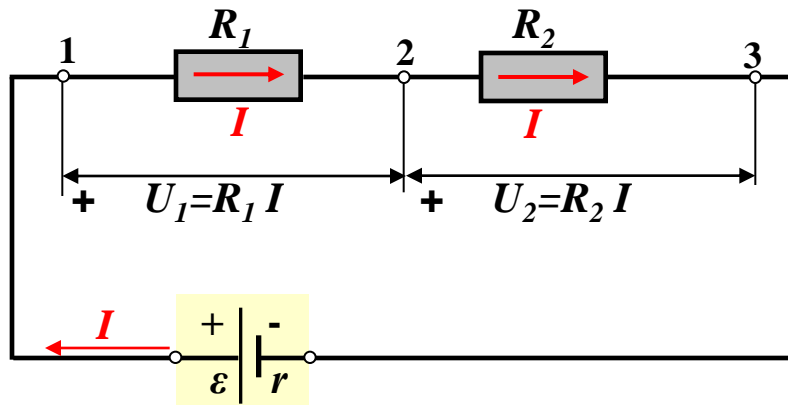
Ove relacije predstavljaju **Omov zakon**.

Jačina struje I kroz otpornik, upravo je srazmjerna naponu U na krajevima otpornika, a obrnuto srazmjera otpornosti R otpornika.

U skladu sa Omovim zakonom, za jedinice važe odnosi:

$$[A] = \left[\frac{V}{\Omega} \right], [V] = [A\Omega], [\Omega] = \left[\frac{V}{A} \right]$$

Napon na krajevima otpornika predstavlja pad napona na otporniku.



ELEKTRIČNA SNAGA I ENERGIJA

Snaga električne struje, odnosno električna snaga ili kraće SNAGA (oznaka P) je jednaka proizvodu napona i jačine struje:

$$P = U I$$

Po Omovom zakonu je: $U = I R \Rightarrow$

$$P = R I^2$$

Jedinica za snagu je: *vat*, $[W]$

U skladu sa izrazima za snagu, za jedinice važi: $[W] = [V A]$, $[W] = [\Omega A^2]$

ELEKTRIČNA ENERGIJA (oznaka W) je proizvod snage i vremena.

$$W = P t \Rightarrow W = U I t \quad \text{i} \quad W = R I^2 t$$

Jedinica za električnu energiju je: *vat čas*, $[W h]$

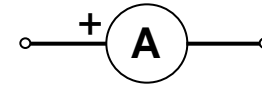
Najčešće se koristi jedinica: *kilovat čas*, $[kW h]$

Snaga u kolu sa otpornikom je snaga transformacije električne energije u toplotnu. To je snaga otpornika, ili snaga džulovih gubitaka.

Džulov zakon: Količina toplote koja se oslobodi u otporniku otpornosti R kroz koji tokom vremena t protiče struja I , upravo je srazmjerna kvadratu jačine struje, otpornosti otpornika i vremenu proticanja struje.

MJERENJE STRUJE

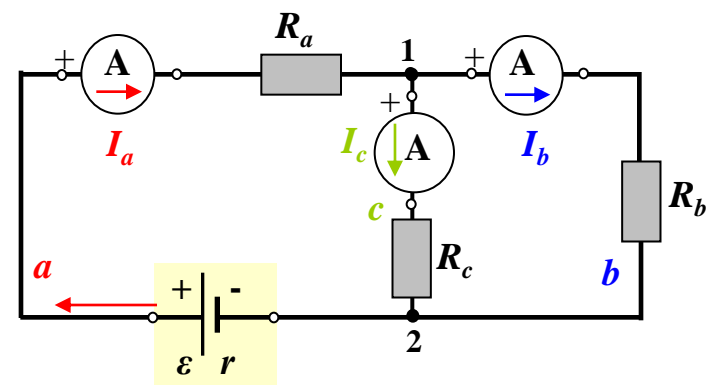
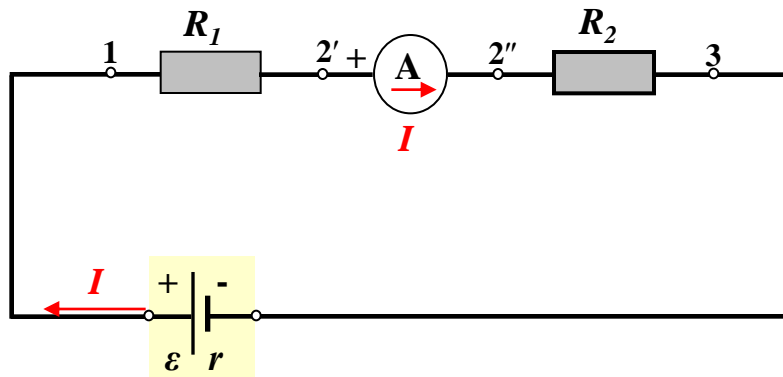
Jačina električne struje se mjeri pomoću AMPERMETRA



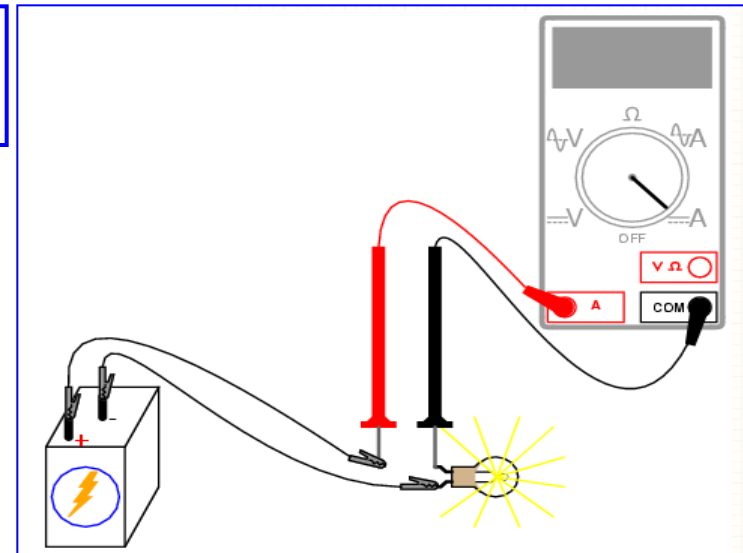
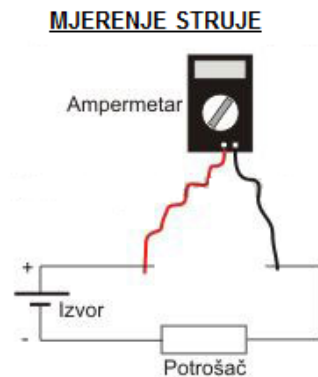
Ampermetar se uključuje redno u granu kola u kojoj treba izmjeriti struju.

Ta struja mora biti ista prije i nakon uključivanja ampermetra. \Rightarrow

Ampermetri moraju biti takve izvedbe da im je unutrašnja otpornost veoma mala: $r_A \approx 0$

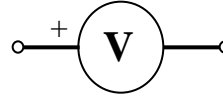


Kroz ampermetar
smjer struje je od + priključka ampermetra !!!



MJERENJE NAPONA

Napon se mjeri pomoću VOLTMETRA:



Voltmetar se priključuje paralelno grani ili elementu kola na čijim krajevima se mjeri napon

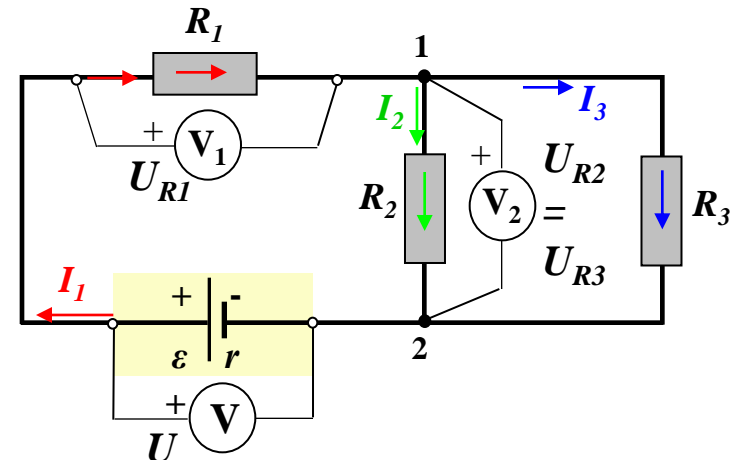
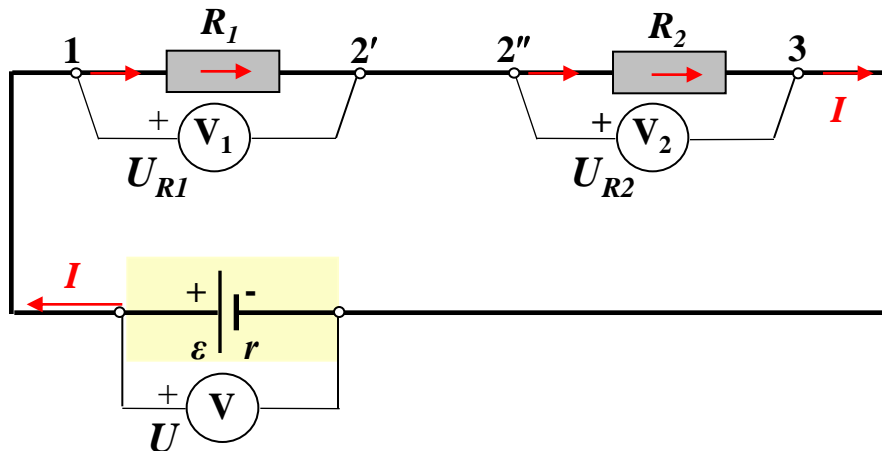
Nakon priključenja voltmetra struja kroz voltmetar mora biti ≈ 0 . \Rightarrow

Voltmetr mora biti takve izvedbe da je njegova unutrašnja otpornost veoma velika: $r_V \rightarrow \infty$

Jedna priključna tačka voltmetra uvijek je označen sa +.

Taj priključak se obavezno vezuje za tačku višeg potencijala napona koji mjerimo.

Priključak + voltmetra je tačka višeg potencijala. Struja teče od + voltmetra !



RJEŠAVANJE ELEKTRIČNIH KOLA

Riješiti električno kolo znači odrediti nepoznate električne veličine: struje u granama (elementima) kola, napone na elementima (granama) kola, otpornosti elemenata i dr.

Osnovni zakoni koji se koriste za rješavanje električnih kola su: **Omov zakon**, **I Kirhofov zakon** i **II Kirhofov zakon**.

I Kirhofov zakon odnosi se na struje u čvorovima električnog kola.

Zbir struja u nekom čvoru električnog kola jednak je nuli:

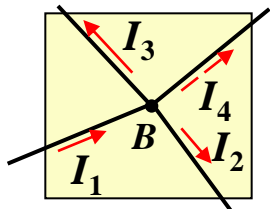
$$\sum_{\text{čvor}} I_i = 0$$

Pri tome su, **struje koje ulaze u čvor pozitivne +**, **a struje koje izlaze iz čvora negativne -**, ili obratno, što je svejedno.

I Kirhofov zakon se može izraziti i na sljedeći način:

Zbir struja koje ulaze u neki čvor električnog kola jednak je zbiru struja koje iz njega izlaze:

$$\sum_{\rightarrow \text{čvor}} I_i = \sum_{\text{čvor} \rightarrow} I_i$$



I Kirhofov zakon za čvor B: $I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$ ili $I_1 = I_2 + I_3 + I_4$

Primjer: Poznato je $I_1=3$ A, $I_2=2$ A i $I_3=4$ A i njihovi smjerovi. Odrediti I_4 .

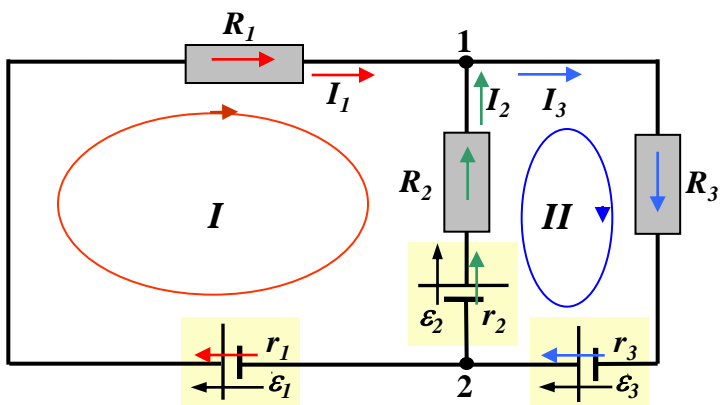
$$I_4 = I_1 - I_2 - I_3 = 3 - 2 - 4 = -3A$$

Znak - znači da je stvarni smjer struje I_4 suprotan pretpostavljenom, odnosno da je ka čvoru B.

II Kirhofov zakon se odnosi na napone kontura složenog električnog kola.

Ovaj zakon povezuje sve napone zatvorene konture, odnosno sve *ems* i napone na otpornostima (padove napona) zatvorene konture: **Algebarska suma napona po zatvorenoj konturi jednaka je nuli.**

Pri primjeni ovog zakona, **neophodno je za konturu za koju postavljamo zakon predhodno odabrati smjer obilaženja konture** (strelicom unutar konture, kao na sl.



II Kirhofov zakon se najčešće piše u obliku:

$$\sum_{\text{kontura}} \varepsilon - \sum_{\text{kontura}} RI = 0$$

U zatvorenoj konturi električnog kola zbir elektromotornih sila umanjen za zbir napona na otpornicima (padova napona) jednak je nuli.

Pri tome:

One *ems* (ε) čiji je smjer isti kao i usvojeni smjer obilaska konture su pozitivne (*u predhodnom izrazu se sabiraju*!), a one koje imaju suprotan smjer su negativne (*u predhodnom izrazu se oduzimaju*!).

Oni naponi na otpornicima (padovi napona RI) kroz koje je smjer struje isti kao i usvojeni smjer obilaska konture su pozitivni (*u predhodnom izrazu se oduzimaju*!), a oni naponi na otpornicima (padovi napona RI) kroz koje je smjer struje suprotan usvojenom smjeru obilaska konture su negativni (*u predhodnom izrazu se sabiraju*!).

II Kirhofov zakon se može pisati i u obliku:

$$\sum_{\text{kontura}} \varepsilon = \sum_{\text{kontura}} RI$$

U svakoj zatvorenoj konturi zbir svih elektromotornih sila jednak je zbiru svih padova napona na otporima.

Pri tome:

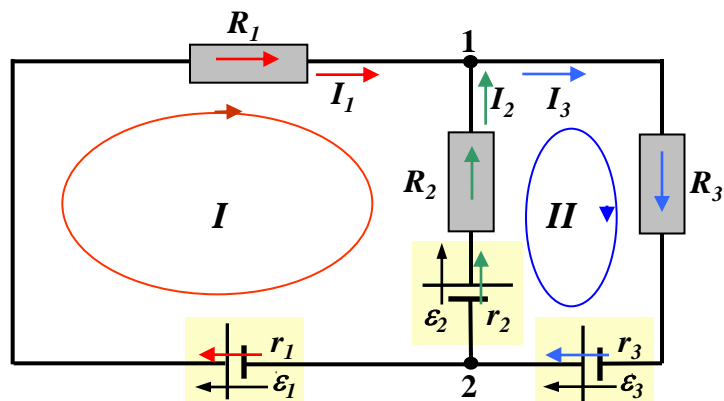
One *ems* (ε) čiji je smjer isti kao i usvojeni smjer obilaska konture su pozitivne (*u ovom izrazu se sabiraju !*), a one koje imaju suprotan smjer su negativne (*u ovom izrazu se oduzimaju !*).

Oni naponi na otpornicima (padovi napona RI) kroz koje je smjer struje isti kao i usvojeni smjer obilaska konture su pozitivni (*u ovom izrazu se sabiraju !*), a oni naponi na otpornicima (padovi napona RI) kroz koje je smjer struje suprotan usvojenom smjeru obilaska konture su negativni (*u ovom izrazu se oduzimaju !*).

Ako nakon primjene Kirchofovih zakona dobijemo negativnu vrijednost jačine struje, to znači da je naša pretpostavka o smjeru te struje bila pogrešna, tj. ta struja ima suprotan smjer od smjera na šemi, a iznos struje je dobar.

Primjenom I Kirhofovog zakona na $m-1$ čvor i II Kirhofovog zakona na $n-m+1$ konturu, dobijamo dovoljan skup jednačina za rješavanje električnog kola, odnosno za definisanje veza između *ems*, otpora i struja i određivanje nepoznatih veličina.

Ilustrujmo primjenu II Kirhofovog zakona na električno kolo sa slike.



Broj čvorova je $m=2$: čvor 1 i čvor 2

Broj grana je $n=3$: grana 1: $2r_1\varepsilon_1R_1$

grana 2: $2r_2\varepsilon_2R_2$

grana 3: $1R_3r_3\varepsilon_3$

Za struje grana I_1 , I_2 i I_3 izaberemo i označimo smjerove!

Broj nezavisnih kontura je $k=n-m+1=2$:

kontura I: $2r_1\varepsilon_1R_1R_2r_2\varepsilon_2$

kontura II: $2r_2\varepsilon_2R_2R_3r_3\varepsilon_3$

Za Konture I i II izaberemo i označimo smjerove obilaska! II Kirhofov zakon:

$$\sum_{\text{kontura}} \varepsilon - \sum_{\text{kontura}} RI = 0$$

II Kirhofov zakon za konturu I: $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - r_1I_1 - R_1I_1 + R_2I_2 + r_2I_2 = 0$

II Kirhofov zakon za konturu II: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - r_2I_2 - R_2I_2 - R_3I_3 - r_3I_3 = 0$

Za konturu I - $2r_1\varepsilon_1R_1R_2r_2\varepsilon_2$:

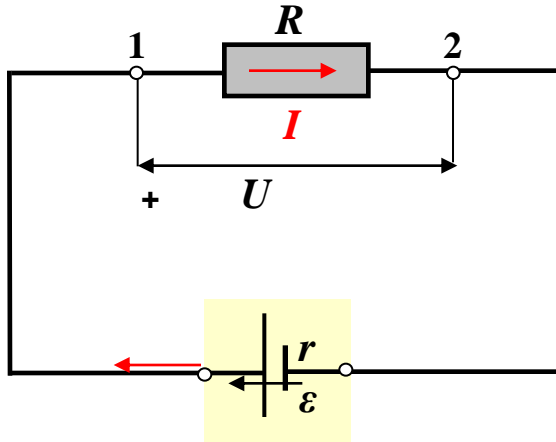
- ε_1 je u smjeru obilaska konture (pozitivan predznak),
- ε_2 je suprotna smjeru obilaska konture (negativni predznak),
- struja I_1 kroz otpornosti r_1 i R_1 je u smjeru obilaska konture, \Rightarrow pozitivni padovi napona r_1I_1 i R_1I_1 , koji se prema izrazu oduzimaju.
- struja I_2 kroz otpornosti r_2 i R_2 je suprotna smjeru obilaska konture, \Rightarrow negativni padovi napona r_2I_2 i R_2I_2 , koji prema sada izrazu sabiraju.

Za konturu II - $2r_2\varepsilon_2R_2R_3r_3\varepsilon_3$:

- ε_2 je u smjeru obilaska konture (pozitivan predznak),
- ε_3 je u smjeru obilaska konture (pozitivan predznak),
- struja I_2 kroz otpornosti r_2 i R_2 je u smjeru obilaska konture \Rightarrow pozitivni padovi napona r_2I_2 i R_2I_2 , koji se prema izrazu odzimaju.
- struja I_3 kroz otpornosti r_3 i R_3 je u smjeru obilaska konture \Rightarrow pozitivni padovi napona r_3I_3 i R_3I_3 , koji se prema izrazu odzimaju.

RJEŠAVANJE PROSTIH ELEKTRIČNIH KOLA

1. PROSTO ELEKTRIČNO KOLO sa jednim izvorom i jednim prijemnikom



Kolo sadrži:

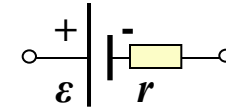
jedan izvor - *ems* : $\varepsilon[V]$, $r[\Omega]$

jedan prijemnik - otpornik: $R[\Omega]$

Kolom protiče struja: $I = ?$

Naznačiti smjer struje !!!

Smjer struje je u smjeru *ems* izvora (od + izvora).



Jačina struje je određena Ohmovim zakonom:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \Rightarrow \varepsilon = RI + rI$$

Napon na krajevima prijemnika, odnosno pad napona na otporniku R , je: $U = RI$

To je ujedno i napon na krajevima izvora: $U = \varepsilon - rI$

Do predhodnih izraza može se doći i primjenom II Kirhofovog zakona:

Odaberemo smjer obilaska konture - u smjeru struje (od + izvora). \Rightarrow

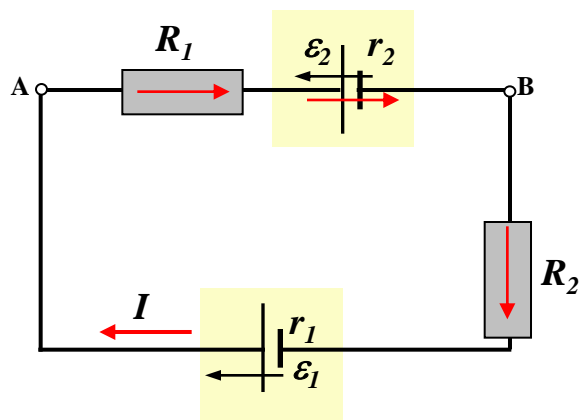
$$\sum_{\text{kontura}} \varepsilon - \sum_{\text{kontura}} RI = 0$$

$$\varepsilon - RI - rI = 0$$

$$\varepsilon = RI + rI = U + rI$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

PROSTO ELEKTRIČNO KOLO sa više izvora i više prijemnika



Kolo sadrži:

dva izvora - *ems* : $\varepsilon_1 [V]$ $r_1 [\Omega]$ i $\varepsilon_2 [V]$ $r_2 [\Omega]$

dva prijemnika - otpornika: $R_1 [\Omega]$ i $R_2 [\Omega]$

Kolom protiče struja: $I = ?$

Naznačimo smjer struje !!! npr. u smjeru veće *ems*.

Jačina struje je određena Omovim zakonom:

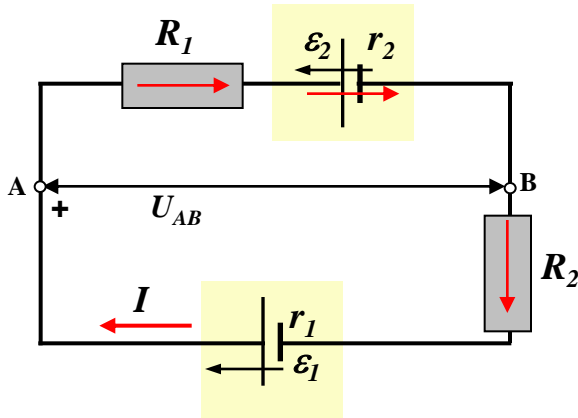
$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R}$$

U sumi $\sum \varepsilon$ učestvuju se sve *ems* izvora koji se nalaze u kolu.

Pri tome, one *ems* čiji se smjer poklapa sa usvojenim referentnim smjerom struje (smjerom obilaženja kola- konture) uzimaju se sa znakom +, a one koje imaju suprotan smjer od usvojenog referentnog smjera struje (smjera obilaženja kola-konture) sa znakom - !

U sumi $\sum R$ sabiraju se sve otpornosti koje se pojavljuju u kolu, dakle otpornosti svih prijemnika i unutrašnje otpornosti svih izvora.

Ako pri proračunu dobijemo $I > 0$ (pozitivna vrijednost jačine struje), znači da se stvarni smjer struje poklapa sa usvojenim referentnim smjerom struje, a ako dobijemo $I < 0$ (negativna vrijednost jačine struje), stvarni smjer struje je suprotan usvojenom referentnom smjeru struje.

NAPON između dvije tačke u prostom kolu, određen je izrazom:

$$U_{AB} = \sum \varepsilon - \sum RI \quad \text{od B ka A}$$

U_{AB} jenapon između tačke **A** – tačka višeg potencijala i tačke **B** – tačka nižeg potencijala.

Za kolo na slici:

Po putanji (grani) $BR_2r_1\varepsilon_1A$, od B ka A (u smjeru struje): $U_{AB} = \varepsilon_1 - R_2I - r_1I$,

Po putanji (grani) $Br_2\varepsilon_2R_1A$, od B ka A (nasuprot sjera struje): $U_{AB} = \varepsilon_2 + R_1I + r_2I$.

U sumi $\sum \varepsilon$ od B ka A

učestvuju sve **ems koje** se nalaze na posmatranom dijelu kola (grani) između tačaka **B** i **A**. Pri tome, ems koje imaju smjer od B ka A uzimaju se sa znakom +, a one koje imaju suprotan smjer sa znakom - !!!

U sumi $\sum RI$ od B ka A

učestvuju naponi (**padovi napona**) na svim otpornicima koji se nalaze na posmatranom dijelu kola (grani) između tačaka **B** i **A**.

Pri tome, ako od B ka A idemo u smjeru struje kroz otpornik, PAD NAPONA na otporniku je POZITIVAN (u izrazu za U_{AB} ga ODUZIMAMO), a ako od B ka A idemo suprotno smjeru struje kroz otpornik, PAD NAPONA na otporniku je NEGATIVAN (u izrazu za U_{AB} ga SABIRAMO) !!!

Ako pri proračunu dobijemo $U_{AB} > 0$, znači da je tačka **A** tačka višeg potencijala, a ako dobijemo $U_{AB} < 0$, tačka **B** je tačka višeg potebcijala.

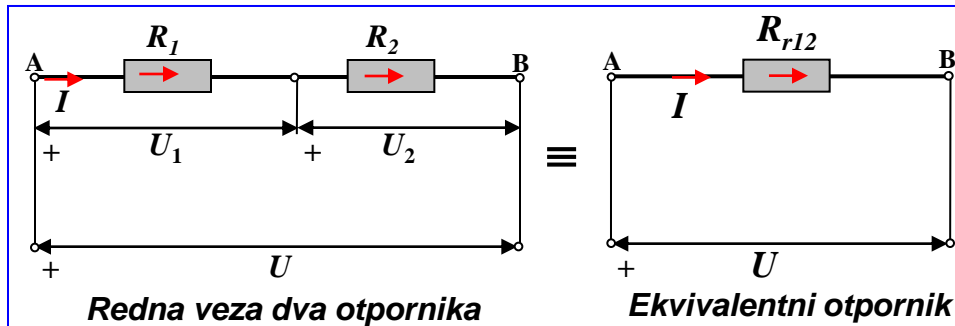
VEZIVANJE OTPORNIKA

Redna veza otpornika

Posmatrajmo dva otpornika otpornosti R_1 [Ω] i R_2 [Ω] vezana redno i priključena na napon U [V] (slika).

Zamjenimo ovu rednu vezu ekvivalentnim otpornikom R_{r12} [Ω], sa istim naponom U [V] i strujom I [A].

Kolika je ekvivalentna otpornost redne veze, $R_{r12} = ?$



Karakteristike redne veze su:

- Struja kroz oba otpornika je ista: I ,
- Napon na krajevima redne veze jednak je zbiru napona na krajevima redno vezanih otpornika:
 $U = U_1 + U_2$.

Prema Omovom zakonu, naponi na otpornicima su: $U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$, pa je:

$$U = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

Otpornost ekvivalentnog otpornika (**ekvivalentna otpornost redne veze**) je:

$$R_{r12} = \frac{U}{I} = \frac{(R_1 + R_2) I}{I} = R_1 + R_2$$

Ekvivalentna otpornost redne veze dva otpornika jednaka je zbiru njihovih pojedinačnih otpornosti: $R_{r12} = R_1 + R_2$

Snaga ekvivalentnog otpornika, odnosno ukupna snaga kola sa dva redno vezana otpornika, jednaka je zbiru snaga svakog otpornika:

$$P = U I = U_1 I + U_2 I = R_1 I^2 + R_2 I^2 = P_1 + P_2 .$$

Redna veza N otpornika otpornosti R_i , $i = 1, 2, 3, \dots, N$, priključena na napon U :

- Struja kroz sve otpornike je ista: $I_i = I$ (I je i struja kroz ekvivalentni otpornik);
- Naponi na pojedinačnim otpornicima su različiti i određeni Omovim zakonom: $U_i = R_i I$;
- Ukupan napon redne veze jednak je zbiru napona na pojedinačnim otpornicima: $U = \sum_{i=1}^N U_i$ (U je i napon na krajevima ekvivalentnog otpornika);
- Otpornost ekvivalentnog otpornika ($R_r = \frac{U}{I}$), odnosno ekvivalentna otpornost N redno vezanih otpornika je:

$$R_r = \sum_{i=1}^N R_i .$$

Ekvivalentna otpornost redno vezanih otpornika jednaka je zbiru njihovih otpornosti.

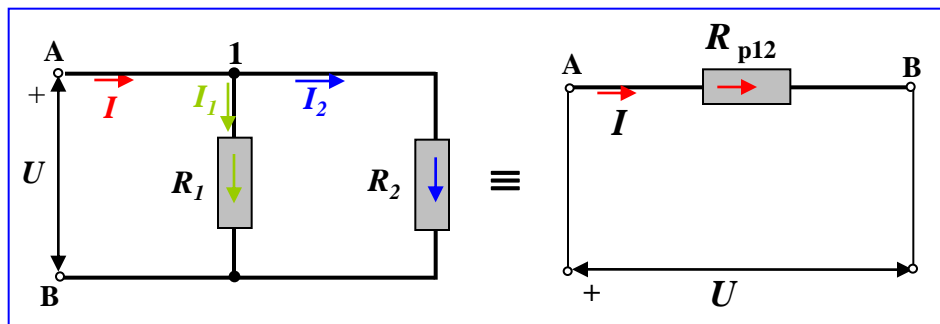
- Snaga ekvivalentnog otpornika, odnosno ukupna snaga N redno vezanih otpornika jednaka je zbiru snaga pojedinačnih otpornika:

$$P_r = \sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N U_i I = \sum_{i=1}^N R_i I^2 = \sum_{i=1}^N \frac{U_i^2}{R_i} .$$

Paralelna veza otpornika

Posmatrajmo dva otpornika otpornosti R_1 [Ω] i R_2 [Ω] vezana paralelno i priključena na napon U [V] (slika).

Zamjenimo ovu rednu vezu ekvivalentnim otpornikom R_{p12} [Ω], sa istim naponom U [V] i strujom I [A].
Kolika je ekvivalentna otpornost paralelne veze, $R_{p12}=?$



Karakteristike paralelne veze su:

- Naponi na krajevima otpornika su isti i jednak naponu U .
- Ukupan struja I jednaka je zbiru struja kroz otpornike (I Kirhofov zakon):
 $I = I_1 + I_2$.

Struje kroz otpornike su različite i određene Omovim zakonom: $I_1 = \frac{U}{R_1}$, $I_2 = \frac{U}{R_2}$

Otpornost ekvivalentnog otpornika (**ekvivalentna otpornost paralelne veze dva otpornika**) je:

$$R_{p12} = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow R_{p12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \text{ odnosno } \frac{1}{R_{p12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Snaga ekvivalentnog otpornika, odnosno ukupna snaga kola sa dva paralelno vezana otpornika, jednaka je zbiru snaga svakog otpornika:

$$P = UI = UI_1 + UI_2 = P_1 + P_2 .$$

Paralelna veza N otpornika otpornosti R_i , $i = 1, 2, 3, \dots, N$ priključenih na napon U :

- Napon na svim otpornicima je isti: $U_i = U$ (U je i napon na krajevima ekvivalentnog otpornika);
- Struje pojedinačnih otpornika su različite i određene Omovim zakonom:

$$I_i = \frac{U}{R_i};$$

- Ukupna struja je jednaka zbiru struja kroz pojedinačne otpornika:

$$I = \sum_{i=1}^N I_i \quad (I \text{ je i struja kroz ekvivalentni otpornik);}$$

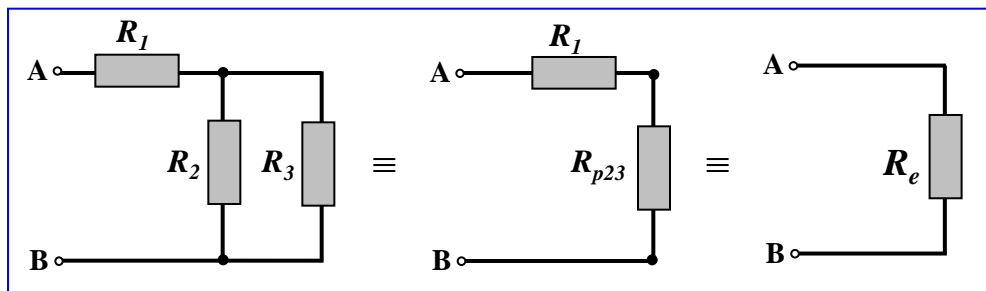
- Otpornost ekvivalentnog otpornika ($R_p = \frac{U}{I}$), odnosno **ekvivalentna otpornost N paralelno vezanih otpornika** se računa preko izraza:

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}.$$

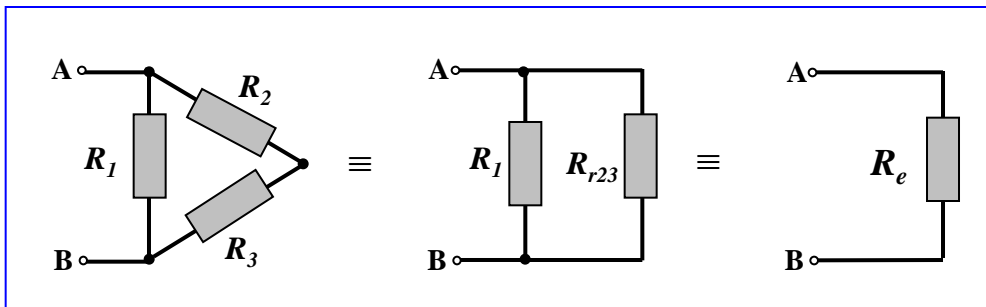
- Ukupna snaga jednaka je zbiru snaga pojedinačnih otpornika:

$$P_p = \sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N U I_i = \sum_{i=1}^N R_i I_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{U^2}{R_i}.$$

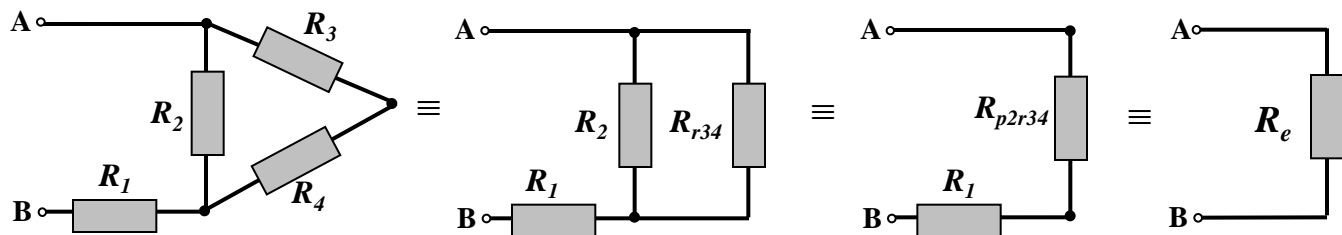
Mješovita veza otpornika javlja se kao kombinacija redne i paralelne veze, npr. kao na slikama.



$$R_e = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

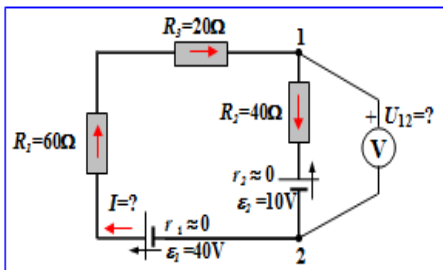


$$R_e = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



$$R_e = R_1 + \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_2 + (R_3 + R_4)}$$

1. Za kolo na slici, odrediti struju u kolu i pokazivanje voltmetra.



Rješenje

Za struju u kolu pretpostavili smo referentni smjer kao na slici (u smjeru veće *ems*). Vrijednost struje je, na osnovu Omovog zakona za prosto kolo.:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{40[V] - 10[V]}{60[\Omega] + 40[\Omega] + 20[\Omega]} = \frac{30[V]}{120[\Omega]} = 0,25A$$

Ems ε_1 je pozitivna, jer je u smjeru struje, a *ems* ε_2 je negativna jer je suprotna usvojenom smjeru struje!

Voltmetar pokazuje napon U_{12} . Ovaj napon je, prema izrazu za napon između dvije tačke, idući po putanji $2\varepsilon_1 R_1 R_3 1$ (u smjeru od 2 ka 1, od tačke nižeg ka tački višeg potencijala) jednak:

$$U_{12} = \sum_{2\varepsilon_1 R_1 R_3 1} \varepsilon - \sum_{2\varepsilon_1 R_1 R_3 1} RI = \varepsilon_1 - R_1 I - R_3 I = 40[V] - 60[\Omega] \cdot 0,25[A] - 20[\Omega] \cdot 0,25[A] = 20V$$

Ems ε_1 je pozitivna, jer je u smjeru od 2 ka 1.

Naponi na otpornostima (padovi napona) $R_1 I$ i $R_3 I$ se oduzimaju, jer je struja kroz njih u smjeru od 2 ka 1!

Do iste vrijednosti se dolazi računajući napon po putanji $2\varepsilon_2 R_2 1$ (od 2 ka 1):

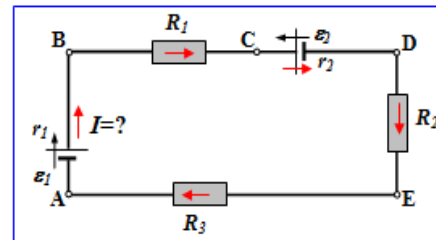
$$U_{12} = \sum_{2\varepsilon_2 R_2 1} \varepsilon - \sum_{2\varepsilon_2 R_2 1} RI = \varepsilon_2 + R_2 I = 10[V] + 40[\Omega] \cdot 0,25[A] = 20V$$

Ems ε_2 je pozitivna, jer u smjeru od 2 ka 1.

Napon na otporniku (pad napona) $R_2 I$ se sabira, jer je struja kroz otpornik suprotna smjeru od 2 ka 1!

2. Za kolo na slici odrediti struju i napon U_{DB} .

Poznato je: $\varepsilon_1 = 10V$, $\varepsilon_2 = 20V$, $r_1 = r_2 = 1\Omega$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 2\Omega$.



Rješenje

Usvojimo i označimo na šemi referentni smjer strujekao, npr. kao na slici. Struja je, na osnovu Omovog zakona za prosto kolo:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + R_1 + r_2 + R_2 + R_3} = \frac{10 - 20}{1 + 2 + 1 + 4 + 2} = \frac{-10}{10} = -1A$$

Ems ε_1 je pozitivna jer je u smjeru struje, a *ems* ε_2 je negativna jer je suprotna referentnom smjeru struje! Sve otpornosti u kolu se sabiraju!

Kao rješenje dobili smo negativnu vrijednost struje. To znači da je stvarni smjer struje suprotan usvojenom referentnom smjeru. Ovo je logično jer smo za referentni smjer uzeli u smjeru *ems* manje vrijednosti. U principu, kad se znaju vrijednosti *ems*, referentni smjer struje treba odabrati u smjeru veće (većih) *ems*.

Napon U_{DB} , prema izrazu za napon između dvije tačke, idući po putanji $BR_1 r_2 \varepsilon_2 D$ (u smjeru od B ka D, od tačke nižeg ka tački višeg potencijala) je:

$$U_{DB} = \sum_{BR_1 r_2 \varepsilon_2 D} \varepsilon - \sum_{BR_1 r_2 \varepsilon_2 D} RI = -\varepsilon_2 - R_1 I - r_2 I = -20 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = -17V$$

Ems ε_2 je negativna, jer je suprotna smjeru od B ka D!

Naponi na otpornostima (padovi napona) $R_1 I$ i $r_2 I$ se oduzimaju, jer je struja kroz njih u smjeru od B ka D!

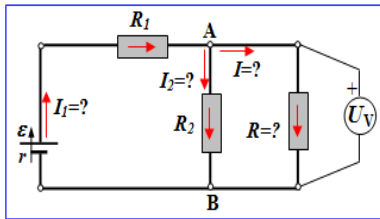
Do iste vrijednosti se dolazi računajući napon po putanji $Br_1 \varepsilon_1 R_3 R_2 D$ (od B ka D):

$$U_{DB} = -\varepsilon_1 + r_1 I + R_3 I + R_2 I = -10 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) = -17V$$

Kao rješenje dobili smo negativnu vrijednost napona U_{DB} . To znači da je tačka B na višem potencijalu u odnosu na tačku D. $U_{BD} = 17V$.

3. Za kolo na slici odrediti struje u kolu i otpornost R .

Poznato je: $\varepsilon = 200V$, $r \approx 0$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $U_V = 100V$.



Rješenje

Odaberemo i prikažemo smjerove struja, npr. kao na slici !

Voltmetar mjeri napon između tačaka A i B, pri čemu je tačka A na višem potencijalu: $U_{AB} = U_V = 100V$. T

To je napon (pad napona) na otporniku R_2 : $U_V = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{U_V}{R_2} = \frac{100[V]}{50[\Omega]} = 2A$

To je i napon na krajevima $A-B$ grane $Br\varepsilon R_1 A$:

$$U_V = U_{AB} = \sum_{B \rightarrow A} \varepsilon - \sum_{B \rightarrow A} RI = \varepsilon - R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon - U_V}{R_1} = \frac{200[V] - 100[V]}{10[\Omega]} = 10A$$

Po I Kirchofovom zakonu za čvor A je: $I_1 - I_2 - I = 0 \Rightarrow$

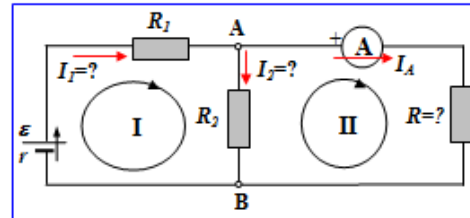
$$I = I_1 - I_2 = 10[A] - 2[A] = 8A$$

I napon (pad napona) na otporniku R je napon voltmetra: $U_V = RI \Rightarrow$

$$R = \frac{U_V}{I} = \frac{100[V]}{8[A]} = 12,5\Omega$$

4. Za kolo na slici odrediti nepoznate struje u kolu i otpornost R .

Poznato je: $\varepsilon = 200V$, $r \approx 0$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $I_A = 8A$.



Rješenje

Ampermetar mjeri struju kroz otpornost R . Smjer struje kroz ampermetar je od pola +, konkretno smjer struje kroz granu ARB je od A ka B.

Odaberimo i naznačimo smjerove struja, npr. kao na slici !

II Kirchofov zakon za konturu I: $Br\varepsilon R_1 R_2 B$, uz usvojeni smjer obilaženja konture, npr. kao na slici (u smjeru struje I_1) daje:

$$\varepsilon - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \quad \dots(1)$$

I Kirchofov zakon za čvor A daje: $I_1 = I_2 + I_A = I_2 + 8[A]$... (2)

Uvrštavajući (2) u (1) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \varepsilon - R_1(I_2 + I_A) - R_2 I_2 &= 0 \\ 200[V] - 10[\Omega] \cdot I_2 - 10[\Omega] \cdot 8[A] - 50[\Omega] \cdot I_2 &= 0 \\ 120[V] - 60[\Omega] \cdot I_2 &= 0 \\ I_2 &= \frac{120[V]}{60[\Omega]} = 2A \end{aligned}$$

Iz (2) \Rightarrow

$$I_1 = I_2 + I_A = 2[A] + 8[A] = 10A$$

II Kirchofov zakon za konturu II: $BR_2 AR B$, uz usvojeni smjer obilaženja konture, npr. kao na slici (u smjeru struje I_A) daje:

$$-RI_A + R_2 I_2 = 0$$

\Rightarrow

$$R = \frac{R_2 I_2}{I_A} = \frac{50[\Omega] \cdot 2[A]}{8[A]} = 12,5\Omega$$